

XXVII KONKURS MATEMATYCZNY
im. prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(4 listopada 2011 r. godz. 10:00 - 12:00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Podaj z uzasadnieniem liczbę elementów zbioru zawierającego trójkąty prostokątne, których długości boków wyrażone są liczbami pierwszymi

Zadanie 2.

Wyznacz całkowite rozwiązania układu równań $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$.

Zadanie 3.

Na bokach AD i BC równoległoboku ABCD zaznaczono punkty M i K tak, że $|AM| = |CK|$ oraz punkt P należący do boku AB. Proste MK, DP, CP rozcinają równoległobok na trzy trójkąty i trzy czworokąty. Wykaż, że pole jednego trójkąta jest równe sumie pól dwóch pozostałych trójkątów.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Liczby a, b, c spełniają równość $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = 1$. Wykazać, że jeden z ułamków tej równości jest równy -1, a pozostałe są równe +1.

Zadanie 2.

Rozwiąż układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych: $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + \cos^2 z = 2 \end{cases}$.

Zadanie 3.

Oblicz długość środkowej AD trójkąta ABC, którego długości boków są równe odpowiednio a, b, c .

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Ciąg liczbowy określony jest wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} a_1 = 300 \\ a_n = a_{n-1} + 300 + (n-1) \cdot 20 \end{cases}$.

Który z wyrazów tego ciągu ma wartość 50000? Jeżeli nie jest to możliwe, to wyznacz dwa wyrazy położone w bezpośrednim sąsiedztwie z tą liczbą i podaj ich wartości w przybliżeniu do jedności.

Zadanie 2.

Dowieść, że układ równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy + z^2 + 1 = 0 \end{cases}$ nie posiada rozwiązań w zbiorze R, przy założeniu, że $z \neq 0$.

Zadanie 3.

Udowodnić, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta ABC, to $(a - b)^2 < c(2a + 2b - c)$.