

XXVI KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap wojewódzki)
(26 listopada 2010 r. godz. 10:00 - 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Znaleźć wszystkie liczby pierwsze takie, że liczby $p^2 + 2$ i $p^3 + 2$ są jednocześnie liczbami pierwszymi.

Zadanie 2.

Udowodnić, że jeśli liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, to $a^4 + b^4 \geq (a + b)^2$.

Zadanie 3.

Liczby rzeczywiste x, y, z są parami różne i spełniają równości: $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Wyznaczyć wartość iloczynu xyz .

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Iloczyn pewnych trzech liczb pierwszych jest równy ich pięciokrotnej sumie. Znajdź te liczby.

Zadanie 2.

Wykazać, że jeśli $|x - 1| + |y - 1| < 1$, to $|x^2 + y^2 - 2| < 3$.

Zadanie 3.

Wykazać, że jeżeli między długościami a, b, c boków trójkąta zachodzi związek $a^2 = b^2 + bc$, to kąt wewnętrzny leżący naprzeciw boku o długości a jest dwa razy większy od kąta wewnętrznego leżącego naprzeciw boku o długości b .

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2^{-1+\sin x} + 2^{-1+\cos x} \geq 2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Zadanie 2.

Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ istnieje wielomian f stopnia n o współczynnikach całkowitych taki, że $f(2) = 7$ i $f(5) = 13$. Podać wielomiany stopnia drugiego i trzeciego spełniające warunki zadania.

Zadanie 3.

Dany jest czworokąt wypukły, którego każdy bok ma długość mniejszą od 20. Wykazać, że dla każdego punktu O należącego do wnętrza czworokąta istnieje wierzchołek A tego czworokąta taki, że $|OA| < 15$.

POWODZENIA