XXV KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(6 listopada 2009 r. godz. 10:00 - 12:00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie l.

Rozwiązać w zbiorze liczb rzeczywistych równanie $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 3 = 2(2x + 3y + 4z)$.

Zadanie 2

Ile boków ma wielokąt, jeżeli ich liczba jest k razy większa od liczby przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka?

Zadanie 3.

Znaleźć taką najmniejszą liczbę naturalną n, aby liczby postaci $n + 1$ oraz $n - 110$ były kwadratami liczb naturalnych.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie l.

Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144 \\ x^2 + 4x + 5y = 24 \end{cases}$.

Zadanie 2.

Podać wymiary takiego prostokąta, którego pole jest największe przy stałym obwodzie m.

Zadanie 3.

Dowieść, że jeżeli $x, y \geq 0$, to $\frac{1}{2^4}(xy + 2x + 2y + 4) \geq \frac{xy}{x+y}$. Uzasadnić, kiedy zachodzi równość?

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie l.

Znaleźć rozwiązania w liczbach całkowitych równania $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Zadanie 2.

Wykazać, że jeżeli h_a, h_b, h_c są długościami wysokości trójkąta ABC opuszczonymi odpowiednio na boki tego trójkąta o długościach a, b, c, natomiast r jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to $\frac{h_a + h_b + h_c}{3} \geq 3r$.

Zadanie 3.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$$