

XXV KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap wojewódzki)
(27 listopada 2009 r. godz. 10:00 - 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Wyznaczyć w zbiorze liczb naturalnych wszystkie trójki x, y, z spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y - z = 100 \\ x + y^2 - z = 124 \end{cases}$$

Zadanie 2.

W liczbie sześciocyfrowej podzielnej przez 7 przestawiono pierwszą cyfrę na koniec tej liczby. Udowodnić, że tak utworzona liczba sześciocyfrowa jest także podzielna przez 7.

Zadanie 3.

W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono z wierzchołka C kąta prostego wysokość długości h . W ten sposób otrzymano dodatkowo dwa trójkąty prostokątne. W trójkąt ABC i pozostałe trójkąty wpisano okręgi o promieniach długości odpowiednio r, r_1, r_2 . Wykazać, że $r + r_1 + r_2 = h$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Wiedząc, że $x + \frac{1}{x} = a$, gdzie a jest liczbą daną, obliczyć $x^7 + \frac{1}{x^7}$.

Zadanie 2.

Dowieść, że jeżeli trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$ przybiera wartości całkowite dla każdej całkowitej wartości zmiennej x , to liczby $2a, a + b, c$ są liczbami całkowitymi i na odwrót.

Zadanie 3.

Wiadomo, że liczby rzeczywiste x, y, z są dodatnie i zachodzi $xyz = 1$. Dowieść, że $x + y + z \geq 3$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:
$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Zadanie 2.

Znaleźć liczbę czterocyfrową, której dwie pierwsze cyfry są jednakowe, dwie ostatnie cyfry są również jednakowe i jest ona kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3.

Wielomian $W(x)$ przyjmuje dla $x = 26$ wartość 8, a dla $x = 29$ wartość 15. Dowieść, że co najmniej jeden z jego współczynników nie jest liczbą całkowitą.

POWODZENIA