XXII KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(20 października 2006 r. godz. 10:00 - 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie l.
Dowieść, że liczba $43^{43} - 17^{17}$ dzieli się przez 10 bez reszty.

Zadanie 1.
Na płaszczyźnie obrano w dowolny sposób 2006 różnych punktów A_1, A_2, A_3, …,A_{2006}. Dowieść, że na dowolnym okręgu o promieniu długości l, leżącym na tej płaszczyźnie, istnieje taki punkt B, że $|A_1B| + |A_2B| + |A_3B| + \ldots + |A_{2006}B| \geq 2006$.

Zadanie 3.
Dla jakich wartości parametru m równanie $| x - 1 | = (m - 1)^2$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie l.
Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.

Zadanie2.
Na odcinku o długości 16 cm oraz na jego połówkach, jako na średnicach, zakreślono trzy okręgi. Wyznacz długość promienia okręgu stycznego do tych trzech okręgów.

Zadanie 3.
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie l.
Znaleźć taką liczbę rzeczywistą m, dla której iloczyn pewnych dwóch pierwiastków rzeczywistych równania $2x^4 - 7x^3 + mx^2 + 22x - 8 = 0$ wynosi 2.

Zadanie 2.
Na płaszczyźnie danych jest sześć równych okręgów o promieniu długości r i jeden okrąg o danym promieniu długości R. Każdy z sześciu równych okręgów jest styczny zewnętrznie do dwóch innych spośród nich i styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu R. Wyznacz długość promienia r.

Zadanie 3.
Udowodnić, że jeżeli $xyz = 1$, $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = z + \frac{1}{z}$ i abc jest liczbą całkowitą, to $a^2 + b^2 + c^2$ jest liczbą całkowitą.