

XXII KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap wojewódzki)
(24 listopada 2006 r. godz. 10:00- 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie $xy + yz + zx = 9 + m$ w zbiorze liczb całkowitych dodatnich, gdzie

$$m = \frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Zadanie 2.

Dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany w punktach D, E, F.

Udowodnij, że jeżeli trójkąty ABC i DEF są podobne, to są one trójkątami równobocznymi.

Zadanie 3.

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z spełniona jest nierówność:

$$xyz \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq x + y + z.$$

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Wykaż, że jeżeli n jest liczbą względnie pierwszą z liczbą 6, to $n^2 - 1$ dzieli się przez 24.

Zadanie 2.

Dwie wysokości trójkąta nie są mniejsze od boków, do których są prowadzone. Znaleźć kąty tego trójkąta.

Zadanie 3.

Liczby rzeczywiste x, y oraz m spełniają warunki: $x + 1 = m - y$ i $xy - 14 = m^2 - 7m$.

Dla jakiej wartości m suma kwadratów $x^2 + y^2$ osiąga wartość największą?

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Liczby pierwsze p i q , gdzie $p > q$, nazywamy bliźniaczymi, jeżeli $p - q = 2$. Udowodnij, że liczby pierwsze p i q , gdzie $p > q$, są bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy $pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 2.

Udowodnij, że jeżeli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, to $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = 0$.

Zadanie 3.

Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 - bx^2 - cx + d$, gdzie a, b, c, d są kolejnymi liczbami naturalnymi.

Wykaż, że $W(x)$ ma zawsze trzy pierwiastki, w tym przynajmniej jeden całkowity. Dla jakich wartości a, b, c, d suma tych pierwiastków jest największa?