## XIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
## Poziom I
**(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2012/2013)**
**Etap rejonowy**
**16 marzec 2013 r., godzina 10.00 (150 minut)**

1. Liczby $a$ i $b$ spełniają równości: $a^3 - 3ab^2 = 29$ i $b^3 - 3a^2b = 34$. Oblicz $a^2 + b^2$.
2. Dwie beczki zawierają razem 240 litrów wody. Gdyby z pierwszej beczki przelać do drugiej tyle litrów wody, żeby zawartość drugiej beczki podwoiła się, a następnie z drugiej beczki przelać do pierwszej tyle litrów wody, żeby zawartość pierwszej beczki podwoiła się, to w obu beczkach będzie jednakowa liczba litrów wody. Ile litrów wody było pierwotnie w każdej beczce?
3. W kwadracie o boku długości 1 ścięto naroża tak, że powstał ośmiokąt o równych długościach boków. Oblicz pole i obwód tego ośmiokąta.
4. Udowodnij, że jeżeli $x^3 + y^3 = 40$ i $x^2 - xy + y^2 = 8$, to $xy = \frac{17}{3}$.
5. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku 2 : 3. Oblicz $\frac{r}{R}$, gdzie $r$ oznacza promień okręgu wpisanego w dany trójkąt, zaś $R$ promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że podany stosunek promieni $\frac{r}{R}$ jest co do wartości mniejszy od $\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

**Powodzenia!**

---

## XIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
## Poziom II
**(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2012/2013)**
**Etap rejonowy**
**16 marzec 2013 r., godzina 10.00 (150 minut)**

1. Rozwiąż w zbiorze liczb rzeczywistych równanie $x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 32x + y^2 + 4xy + 16 = 0$.
2. Wykaż, że dla dowolnych liczb a, b, c, spełniających warunek abc > 0, zachodzi $\frac{a^4+b^4+c^4}{abc} \geq a + b + c$.
3. Wyznacz wszystkie wartości a i b dla których wielomian $W(x) = x^4 + ax^2 + 8x + b$ ma pierwiastek trzykrotny.
4. W trójkącie o danym polu P podzielono każdy bok na trzy równe części i połączono odcinkami punkty podziału co drugi, tworząc dwa trójkąty. Oblicz pole sześciokąta będącego częścią wspólną tych trójkątów.
5. Udowodnij, że jeżeli liczby x, y, z są liczbami całkowitymi i liczba x + y + z jest podzielna przez 6, to liczba $x^3 + y^3 + z^3$ jest również podzielna przez 6.

**Powodzenia!**