

## XI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

### Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2010/2011)

Etap powiatowy

12 marca 2011, godzina 10.00

(150 minut)

1. Kasjerka poukładała banknoty w  $n$  paczek, po  $k$  banknotów w każdej. Gdyby do każdej paczki włożyła o 2 banknoty więcej, to byłoby dokładnie o 3 paczki mniej. Gdyby natomiast dawała o 5 banknotów mniej, to musiałaby zrobić o 11 paczek więcej. Ile było wszystkich pieniędzy, jeśli każdy banknot miał nominał 20 zł.
2. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te podzieliły przekątną na trzy równe części, każda o długości 2cm. Oblicz długości boków tego prostokąta.
3. Wykaż, że liczba 120 dzieli liczbę  $n^5 - 5n^3 + 4n$ , gdzie  $n$  jest dowolną liczbą naturalną.
4. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trapezie równoramiennym, którego ramię ma długość  $\sqrt{10}$ , a podstawy są równe odpowiednio 6 i 4.
5. Oblicz  $(2 - \sqrt{3})^8 + (2 + \sqrt{3})^8$ .

**Powodzenia!**

---

## XI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

### Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2010/2011)

Etap powiatowy

12 marca 2011, godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli dwie liczby całkowite  $a$  i  $b$  spełniają warunki: 17 jest dzielnikiem liczby  $a - 7$  i 17 jest dzielnikiem liczby  $b - 6$ , to 17 jest również dzielnikiem liczby  $2a + 3b + 2$ .
2. Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x - y| + 13 = 0 \\ xy = -2 \end{cases}$$
.
3. Udowodnij, że jeżeli stosunek rozwiązań równania kwadratowego  $ax^2 + (a + b)x + b - a = 0, a \neq 0$  wynosi  $4 : 1$ , to  $29a^2 - 17ab + 4b^2 = 0$ .
4. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 12 cm i ramieniu długości 10 cm wpisano drugi trójkąt równoramienny, którego końce podstawy należą do ramion trójkąta danego, a trzeci wierzchołek jest środkiem podstawy danego trójkąta. Jakie powinny być długości boków trójkąta wpisanego, aby jego pole było największe?
5. Środkowe poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych trójkąta prostokątnego mają długości  $a$  i  $b$ . Oblicz długość trzeciej środkowej tego trójkąta.

**Powodzenia!**