IX Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap rejonowy
9 maja 2008, godzina 10.00 (150 minut)

1. Wykaż, że rozwiązaniem równania $2x^2 + y^2 - 2x - 2xy + 1 = 0$, jest dokładnie jedna para liczb rzeczywistych x, y.
2. Sieczna i styczna do danego okręgu poprowadzone z tego samego punktu *K* są do siebie prostopadłe. Oblicz promień tego okręgu, jeżeli odległość punktu styczności od punktu *K* jest równa 24cm, a cięciwa wyznaczona przez ten okrąg na siecznej ma długość 20cm.
3. W trapezie kąty przy dłuższej podstawie mają miary 30º oraz 45º. Oblicz pole tego trapezu, jeżeli wiesz, że różnica kwadratów długości podstaw tego trapezu jest równa 100cm^2.
4. Sprawdź, czy ułamek $U = \frac{36\cdot 18^n - 8\cdot 2^{n-4}\cdot 9^n - 3^{n+1}\cdot 6^{n+1}}{18^{n-1}}$, gdzie *n* jest liczbą naturalną spełnia nierówność: $U \leq \pi \cdot 100$.
5. Pies dostrzegł w odległości 60m lisa i rozpoczął pościg. Skok psa ma długość 2m, a skok lisa ma długość 1m. Pies daje dwa skoki w tym samym czasie, w którym lis daje trzy skoki. Ile metrów drogi musi przebyć pies, aby dogonić lisa?

Powodzenia!

IX Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap rejonowy
9 maja 2008, godzina 10.00
(150 minut)

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich *a, b, c, d* zachodzi:
$2^{\frac{34}{15}} \cdot (a + b + c + d) \geq 15 \cdot a^{\frac{1}{15}} \cdot b^{\frac{2}{15}} \cdot c^{\frac{4}{15}} \cdot d^{\frac{8}{15}}$.
2. Znajdź najmniejszą wartość ułamka $\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$.
3. Oblicz pole figury *F*, która jest zbiorem wszystkich punktów (*x*, *y*) spełniających nierówność:
$$x^2 + y^2 \leq 2 \cdot (|x| + |y|).$$
4. W trójkącie *ABC* o danym polu *S* na bokach *BC, CA, AB* obrano odpowiednio punkty *D, E, F* w taki sposób, że $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|} = k,\ k > 0$. Oblicz pole trójkąta *DEF*.
5. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla $x = 0$ i dla $x = 1$ wartości nieparzyste, to równanie $f(x) = 0$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Powodzenia!