VII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2006/2007)

Etap wojewódzki

06 października 2007r., godzina 10.00

(150 minut)

1. Wyznacz środek symetrii krzywej, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$.

2. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta o polu równym 1, spełniającymi warunek $a \geq b \geq c$, to $b \geq \sqrt{2}$.

3. Uzasadnij, że jeżeli $a^2 + b^2 = (a + b - c)^2$, to $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}$, $b \neq c$.

4. Dane są: trójkąt ABC, w którym bok AB ma długość c, $\angle$ACB ma miarę 120°, oraz trójkąt równoboczny ABD „leżący na zewnątrz" trójkąta ABC. Oblicz odległość środka ciężkości trójkąta ABD od punktu C.

5. Bartek, Maciek i Tomek złożyli się na kupno roweru, przy czym wkład każdego z nich nie przekraczał średniej arytmetycznej wkładów dwóch pozostałych. Ile pieniędzy dał Bartek, jeśli rower ten kosztował 330zł?

Powodzenia!

VII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2006/2007)

Etap wojewódzki

06 października 2007r., godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b są rozwiązaniami równania $x^3 - \mathrm{p}x + 2 = 0$, to liczba $a \cdot b$ jest rozwiązaniem równania $x^3 + \mathrm{p}x^2 - 4 = 0$.

2. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.
   Rozwiąż równanie $\left[x + \frac{1}{2}\right] \cdot \left[x + \frac{2}{3}\right] = 2 \cdot [x]$.

3. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną *k* o tej własności, że wśród dowolnych *k* różnych liczb całkowitych można wskazać dwie, których różnica sześcianów jest podzielna przez 9.

4. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to
   $$3abc \geq a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c).$$

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości a. Trójkąt KLM otrzymano, zginając trójkąt ABC wzdłuż linii KL (K$\in$AC, L$\in$BC), w taki sposób, że wierzchołek C znalazł się w punkcie M na boku AB, przy czym $|AM| = \frac{1}{3}a$. Wyznacz długość odcinka KL.

Powodzenia!