

V Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap powiatowy
19 marca 2005, godzina 10.00 (150 minut)

1. Długości butów trzech braci wyrażają się różnymi liczbami naturalnymi z przedziału $(20; 40)$ cm (przedział otwarty). Gdy odmierzali pokój o długości 3m 60 cm otrzymali dokładnie całkowite pomiary długości pokoju w (swoich) stopach. Podaj długość butów każdego z braci.
2. Rozwiąż równanie $ab + ac + bc = 11$ w liczbach naturalnych dodatnich.
3. Dwaj robotnicy mają wykonać wspólnie pewną pracę w ciągu 16 dni. Po czterech dniach wspólnej pracy dokończył ją tylko jeden robotnik w ciągu 36 dni. W ciągu ilu dni wykonałby tę pracę każdy z robotników sam?
4. Dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na nim w punktach D, E, F. Udowodnij, że jeżeli trójkąty ABC i DEF są podobne, to są one równoboczne.
5. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Powodzenia!

V Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap powiatowy
19 marca 2005, godzina 10.00 (150 minut)

1. Wiedząc, że $a + b + c = 5$ i $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{12}{5}$ oblicz $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c}$.
2. Udowodnij, że jeżeli liczby 12 i n są względnie pierwsze, to $n^2 - 1$ jest podzielne przez 24.
3. Na przeciwprostokątnej BC trójkąta prostokątnego ABC zaznaczono punkt D tak, by obwody trójkątów ABD i ADC były równe. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ADC, jeśli przyprostokątne mają długości 5 oraz 12.
4. Na okręgu umieszczono kolejno punkty A, B, C, D. Przez każdą parę sąsiednich punktów poprowadzono okrąg. Wykaż, że punkty przecięcia się tych okręgów różne od danych leżą na jednym okręgu (zakładamy, że są cztery takie punkty)..
5. Liczby rzeczywiste x, y oraz a spełniają warunek $x + y = a - 1$ i $xy = a^2 - 7a + 14$.

Dla jakiej wartości a suma kwadratów $x^2 + y^2$ osiąga wartość największą ?

Powodzenia!