

IV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
I Poziom
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap wojewódzki - maj 2004

1. Znajdź funkcję liniową g (o ile istnieje), która dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełnia następujące dwa warunki:
 $g(-3x) = -3g(x) + 12$ i $g(x-1) = 5 - g(x)$
2. Udowodnij nierówność: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.
3. W trójkąt ABC wpisano okrąg o promieniu R . Równoległe do boków trójkąta poprowadzono styczne do okręgu, które odcięły przy wierzchołkach A, B i C trzy mniejsze trójkąty zawarte w ABC. Udowodnij, że $R = r_1 + r_2 + r_3$, gdzie r_1, r_2, r_3 są promieniami okręgów wpisanych w powstałe trójkąty.
4. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} |x_1| + x_2 = 1 \\ |x_2| + x_3 = 1 \\ |x_3| + x_4 = 1 \\ \dots \\ \dots \\ |x_n| + x_1 = 1 \end{cases}$$
, gdzie n jest liczbą naturalną nieparzystą.
5. Udowodnij, że z odcinków, które są środkowymi dowolnego trójkąta ABC można zbudować trójkąt. Oblicz stosunek pola tego trójkąta do pola trójkąta ABC.

Powodzenia!

IV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
II poziom
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap wojewódzki - maj 2004

1. Wielomian $W(x)$ daje przy dzieleniu przez $x^2 - 1$ resztę $R(x)$ taką, że $R(0) = 2$, zaś przy dzieleniu przez $x - 1$ resztę 1. Jaką resztę daje przy dzieleniu przez $x + 1$?
2. Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$
3. Na okręgu o promieniu r opisano trapez, którego przekątne mają długości m i n . Udowodnij, że $m^2 + n^2 \geq 16r^2$.
4. Wyznacz liczbę wszystkich różnych rozwiązań nierówności $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2004$ w zbiorze \mathbb{N}_+ liczb naturalnych dodatnich.
5. W trójkącie o bokach długości a, b, c poprowadzono dwusieczną dzielącą na połowy kąt wewnętrzny między bokami o długościach a i c . Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli odcinek dwusiecznej zawarty w trójkącie.

Powodzenia!