II Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas drugich szkół średnich
Poziom I
Etap wojewódzki (wszystkie klasy oprócz matematycznych)
1 czerwca 2002 r. godzina 10.00
(150 minut)

1. Wiedząc, że równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, podaj rozwiązania równania $x^2 + 3px + 9q = 0$.
2. Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 - bx^2 - cx + d$, gdzie a, b, c, d są czterema kolejnymi parzystymi liczbami naturalnymi dodatnimi. Wykaż, że wielomian ma trzy pierwiastki i oblicz dla jakich a, b, c, d suma tych pierwiastków jest największa?
3. a) Dla jakich $k\epsilon C$ $\frac{k^2+2}{k+1}$ jest liczbą całkowitą?
   b) Dla jakich $k\epsilon C$ $\frac{k+11}{k^2+k+2}$ jest liczbą całkowitą?
4. Dany jest kwadrat ABCD o boku długości a. Przekątna AC dzieli ten kwadrat na dwa trójkąty. Punkty M_1 i M_2 są punktami przecięcia się środkowych w tych trójkątach. Oblicz stosunek długości promienia okręgu opisanego na trójkącie AM_1M_2 do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
5. Wykaż, ze jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta o polu S, zaś α, β, γ kątami przeciwległymi tym bokom, to zachodzi związek $ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Powodzenia !

II Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas drugich szkół średnich
Poziom II
Etap wojewódzki (tylko klasy matematyczne)
1 czerwca 2002 r. godzina 10.00
(150 minut)

1. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y \\ x^4 - y^4 = 144 \end{cases}$.
2. Udowodnij, że jeżeli x, y, z, a są liczbami rzeczywistymi dodatnimi i $xyz = 1$, to $(a+x)(a+y)(a+z) \geq (a+1)^3$.
3. Na wykresie funkcji $f(x) = x^2$, $x\epsilon R$ wybrano trzy różne punkty, których odcięte są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a rzędne są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wykaż, ze odcięta co najmniej jednego z tych punktów jest liczbą niewymierną.
4. Dany jest trójkąt o polu S oraz punkt leżący w jego wnętrzu. Proste przechodzące przez ten punkt i równoległe do boków tego trójkąta dzielą go na sześć figur wnętrzami rozłącznych. Pola tych spośród sześciu figur, które są trójkątami wynoszą p, q, r. Wykaż, że $S = \left(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}\right)^2$.
5. Dany jest trójkąt o bokach długości 3, 4, 5. Tworzymy okręgi O_1, O_2, O_3, O_4, w ten sposób, że O_1 jest okręgiem wpisanym w trójkąt, każdy okrąg O_{n+1} jest styczny zewnętrznie do O_n i styczny do boków o długościach 4 i 5 (dla n = 1, 2, 3). Znaleźć sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami. Wynik końcowy można przedstawić w postaci wyrażenia liczbowego.

Powodzenia !