XII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
8 grudnia 2012 r.

Klasa pierwsza

1. Czy liczba 4n + 7, gdzie n jest liczbą naturalną, może być kwadratem liczby naturalnej ? Odpowiedź uzasadnij.

2. Porównaj liczby $A = 33^{77}$, $B = 77^{33}$. Uzasadnij swoją odpowiedź

3. Czy istnieje trójkąt o obwodzie większym od 2012 cm i polu mniejszym od 1 cm^2 ? Odpowiedź uzasadnij.

4. (S) Udowodnij, że liczba $5^{21} + 4^{22} + 3^{20}$ jest podzielna przez 11.

Klasa druga

1. Liczby rzeczywiste x, y, t spełniają układ równań $\begin{cases} x + y = t + 1 \\ xy = 4. \end{cases}$ Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$.

2. Wykaż, że z 11 dowolnych liczb naturalnych można zawsze wybrać dwie takie, których różnica jest podzielna przez 10.

3. Znajdź możliwie najmniejszą wartość pola trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym CAB, w który można wpisać kwadrat AKLM o boku 1 w taki sposób, że wierzchołki K, L, M należą odpowiednio do boków AB, BC, CA.

4. (S) Udowodnij, że liczba $5^{51} + 4^{52} + 3^{50}$ jest podzielna przez 11.

Klasa trzecia

1. Wykaż, że jeśli liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek a + b + c = 3, to zachodzi nierówność $a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq 3$.

2. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 5\sin x + 12\cos x - 1, x \in R$.

3. Oblicz długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = \sqrt{5} + 1$.

4. (S) Udowodnij, że liczba $5^{101} + 4^{102} + 3^{100}$ jest podzielna przez 11.