

**VII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY  
IM. HUGONA STEINHAUSA**

**8 grudnia 2007 r.**

**Klasa pierwsza**

- Wykaż, że równanie  $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1}$  nie ma rozwiązania dla liczb całkowitych dodatnich  $x, y, z$ .
- Basen mogą napełniać dwa krany. Gdy otwarty jest pierwszy kran, to woda napełnia basen w 2 godziny; gdy otwarty jest tylko drugi, to napełnianie trwa 3 godziny. Gdy otwarty jest odpływ, to napełniony basen opróżni się w ciągu 6 godzin. Po jakim czasie napełni się pusty basen, gdy otwarte będą oba krany i odpływ?
- We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku długości  $a$  obrano punkt  $P$ . Wyznacz sumę odległości punktu  $P$  od boków trójkąta.
- Obok podany jest algorytm Gaussa wyznaczania daty niedzieli wielkanocnej w kalendarzu gregoriańskim.

Niedziela wielkanocna przypada dnia  $Y + 1$  miesiąca  $X$ .  
Oblicz, w jakim dniu 1897 r. (rok wstąpienia Patrona konkursu do Gimnazjum w Jaśle - szkoły, w której odbywa się konkurs) była niedziela wielkanocna.

Podziel	przez	iloraz	reszta
rok R	19		A
rok R	100	B	C
B	4	D	E
B + 8	25	F	
B - F + 1	3	G	
19A + B - D - G + 15	30		H
C	4	J	K
32 + 2E + 2J - H - K	7		S
A + 11H + 22S	451	U	
H + S - 7U + 114	31	X	Y

**Czas pracy - 150 minut.**

**VII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY  
IM. HUGONA STEINHAUSA**

**8 grudnia 2007 r.**

**Klasa druga**

- Na starym placu stoją dwa pomniki. Suma ich wieku wynosi  $n$  lat ( $n \in \mathbb{N}_+$ ). Wyższy z nich ma obecnie dwa razy tyle lat, ile niższy miał wtedy, kiedy wyższy miał tyle, ile niższy ma obecnie. Jaką własność musi mieć liczba  $n$ , aby liczby określające wiek pomników były liczbami naturalnymi? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
- Oblicz pole trójkąta, którego wysokości są równe:  $11\frac{1}{5}$ ; 12;  $12\frac{12}{13}$ .
- Udowodnij, że do okręgu o środku w punkcie  $S(\sqrt{2}; \sqrt{3})$  należy co najwyżej jeden punkt kratowy. Punktem kratowym w układzie współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy każdy punkt mający obie współrzędne całkowite.
- Obok podany jest algorytm Gaussa wyznaczania daty niedzieli wielkanocnej w kalendarzu gregoriańskim.

Niedziela wielkanocna przypada dnia  $Y + 1$  miesiąca  $X$ . Oblicz, w jakim dniu 1887 r. (rok urodzenia Patrona) była niedziela wielkanocna.

Podziel	przez	iloraz	reszta
rok R	19		A
rok R	100	B	C
B	4	D	E
B + 8	25	F	
B - F + 1	3	G	
19A + B - D - G + 15	30		H
C	4	J	K
32 + 2E + 2J - H - K	7		S
A + 11H + 22S	451	U	
H + S - 7U + 114	31	X	Y

**Czas pracy - 150 minut.**

**VII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**IM. HUGONA STEINHAUSA**

**8 grudnia 2007 r.**

**Klasa trzecia**

1. Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ . Zbadaj, w zależności od wartości parametru  $k$ , liczbę rozwiązań równania  $|f(x)| = f(k)$ .
2. Udowodnij, że w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie istnieje koło, do którego wnętrza należy dokładnie 2007 punktów kratowych. Punktem kratowym w układzie współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy każdy punkt mający obie współrzędne całkowite.
3. Niech  $h_1, h_2$  oznaczają wysokości równoległoboku o polu  $S$ . Udowodnij, że zachodzi nierówność  $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \geq \frac{1}{\sqrt{S}}$ .
4. Obok podany jest algorytm Gaussa wyznaczania daty niedzieli wielkanocnej w kalendarzu gregoriańskim.

Niedziela wielkanocna przypada dnia  $Y + 1$  miesiąca  $X$ . Oblicz, w jakim dniu 1905 r. (rok ukończenia szkoły, w której odbywa się konkurs, przez Patrona konkursu) była niedziela wielkanocna.

Podziel	przez	iloraz	reszta
rok R	19		A
rok R	100	B	C
B	4	D	E
B + 8	25	F	
B - F + 1	3	G	
19A + B - D - G + 15	30		H
C	4	J	K
32 + 2E + 2J - H - K	7		S
A + 11H + 22S	451	U	
H + S - 7U + 114	31	X	Y

**Czas pracy - 150 minut.**

---