I JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

17 listopada 2001 r.

Klasa druga

1. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{2001^{2002} + 2002^{2001}}$ nie jest liczbą całkowitą.

2. Udowodnij, że jeśli $a + b + c = 0$ i $a \neq 0$, to pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$ są liczby 1 i $\frac{c}{a}$.

3. Dany jest układ równań $\begin{cases} (m+1)x + (m+3)y = m+2 \\ (m-5)x + (m-2)y = m-4 \end{cases}$. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem tego układu jest para liczb rzeczywistych o różnych znakach?

4. (S) Pewien autor czytając swój podręcznik spostrzegł, że w zdaniu: „Odciąć 9 cm na lewym ramieniu kąta 60°, a na prawym .... i obliczyć odległość tak otrzymanych punktów.” jest na miejscu przez nas wykropkowanym błąd: zecer powiększył o 1 liczbę centymetrów podaną w rękopisie. Oczywiście zecer nie pomyślał o tym, żeby zmienić rozwiązanie wydrukowane na końcu podręcznika. Mimo to odpowiedź była poprawna. Jaką liczbę wydrukował zecer w zadaniu? Swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij.

Czas pracy 120 minut.
Nie wolno używać kalkulatorów.
Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !

I JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

17 listopada 2001 r.

Klasa trzecia

1. Zbadaj, czy liczba $\dfrac{1^{2000}+2^{2001}+3^{2002}}{1+2+3}$ jest liczbą całkowitą. Odpowiedź uzasadnij.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x)=(1+|x|)\cdot(1-x)$ i rozwiąż nierówność $f(x)\le -3$.

3. Na okręgu o promieniu 1 opisanym na prostokącie ABCD obrano punkt M. Sprawdź, że zachodzi równość $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2=8$.

4. (S) Pewien autor czytając swój podręcznik spostrzegł, że w zdaniu: „Odciąć 9 cm na lewym ramieniu kąta 60°, a na prawym .... i obliczyć odległość tak otrzymanych punktów." jest na miejscu przez nas wykropkowanym błąd: zecer powiększył o 1 liczbę centymetrów podaną w rękopisie. Oczywiście zecer nie pomyślał o tym, żeby zmienić rozwiązanie wydrukowane na końcu podręcznika. Mimo to odpowiedź była poprawna. Jaką liczbę wydrukował zecer w zadaniu? Swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij.

Czas pracy 120 minut.
Nie wolno używać kalkulatorów.
Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !

I JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

17 listopada 2001 r.

Klasa czwarta

1. Uzasadnij, że dla każdego kąta α zachodzi nierówność $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$.

2. W trójkącie ABC wierzchołek A połączono ze środkiem O okręgu opisanego na tym trójkącie. Wiedząc, że H jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A (czyli rzutem prostokątnym punktu A na prostą wyznaczoną przez punkty B i C), udowodnij, że $\angle OAB = \angle HAC$.

3. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego n liczba $n^5 - 5n^3 + 4n$ jest podzielna przez 120.

5. (S) Pewien autor czytając swój podręcznik spostrzegł, że w zdaniu: „Odciąć 9 cm na lewym ramieniu kąta 60°, a na prawym .... i obliczyć odległość tak otrzymanych punktów.” jest na miejscu przez nas wykropkowanym błąd: zecer powiększył o 1 liczbę centymetrów podaną w rękopisie. Oczywiście zecer nie pomyślał o tym, żeby zmienić rozwiązanie wydrukowane na końcu podręcznika. Mimo to odpowiedź była poprawna. Jaką liczbę wydrukował zecer w zadaniu? Swoją odpowiedź dokładnie uzasadnij.

Czas pracy 120 minut.
Nie wolno używać kalkulatorów.
Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !