

XXX KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(7 listopada 2014 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Niech $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ będą kolejnymi początkowymi liczbami pierwszymi. Czy iloczyn tych liczb powiększony o jeden może być kwadratem liczby naturalnej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.

Oblicz długość boku rombu wpisanego w równoległobok tak, że jego wierzchołki leżą na bokach równoległoboku. Przekątne równoległoboku mają długości 10 cm i 15 cm, zaś boki rombu są równoległe do tych przekątnych.

Zadanie 3.

Dodając sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dwóch liczb całkowitych otrzymamy liczbę 450. Znajdź wszystkie pary liczb spełniających warunki zadania.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie liczby p , dla których każda spośród liczb: $p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 2.

Punkty N i M dzielą dwa nierównoległe odcinki CA i CB odpowiednio tak, że $\frac{|AN|}{|NC|} = \frac{1}{q}$ i $\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{1}{p}$.

Niech P będzie punktem wspólnym odcinków AM i BN. W jakim stosunku punkt P dzieli odcinek AM?

Zadanie 3.

Udowodnij, że jeżeli $xyz = 1$, $\frac{1}{a} = \frac{x}{x^2+1}$, $\frac{1}{b} = \frac{y}{y^2+1}$, $\frac{1}{c} = \frac{z}{z^2+1}$ i abc jest liczbą całkowitą, to $a^2 + b^2 + c^2$ jest liczbą całkowitą.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Rozłóż na czynniki liniowe funkcję $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$, następnie wyznacz jej najmniejszą wartość.

Zadanie 2.

Punkt E leży na boku AC trójkąta ABC. Punkt F jest rzutem równoległym punktu E na bok BC w kierunku AB, a punkt D rzutem równoległym punktu E na bok AB w kierunku BC. Udowodnij, że pole P równoległoboku DBFE jest równe $P = 2\sqrt{P_{\Delta ADE} \cdot P_{\Delta EFC}}$.

Zadanie 3.

Udowodnij, że jeżeli jeden z pierwiastków równania $ax^3 + bx + c = 0$ o współczynnikach wymiernych jest iloczynem dwóch pozostałych pierwiastków, to jest on liczbą wymierną.