XXVIII KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (finał)
(30 listopada 2012 r. godz. 10.00 – 12.00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.
Zbadaj liczbę rozwiązań równania $|mx+2x-3m-6|=|6-2x|-1$ w zależności od parametru m.

Zadanie 2.
Wykaż, że dla $a,b>0$ i $a+b\geq 1$ spełniona jest nierówność: $8a^4\geq 1-8b^4$.

Zadanie 3.
Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Środkiem jego przeciwprostokątnej jest punkt O, natomiast punkty K i L są takimi odpowiednimi punktami przyprostokątnych AC i BC, że $|\measuredangle KOL|=90°$. Udowodnij, że $|KL|^2-|BL|^2=|AK|^2$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla dowolnych $x,y,z\in R$ spełniona jest nierówność
$|x+y-z|+|y+z-x|-|y|\geq\big||x|+|z|\big|-|z+x-y|$.

Zadanie 2.
Liczby a,b,c spełniają równość $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1$. Wykazać, że jeden z ułamków tej równości jest równy -1, a pozostałe $+1$.

Zadanie 3.
W trójkącie ABC o polu P punkt K jest środkiem odcinka AM, gdzie M jest punktem wewnętrznym boku BC. Prosta BK przecina bok AC w punkcie L. Oblicz pole trójkąta AKL.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.
Udowodnij, że dla dowolnych $x,y,z\in R$ spełniających nierówności: $|x+y|-|z|\leq 0$, $|y+z|-|x|\leq 0$, $|z+x|-|y|\leq 0$, zachodzi równość $|x+y+z|=0$.

Zadanie 2.
Wykazać, że jeżeli $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$, to zachodzi nierówność:
$6abc\leq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\leq 2(a^3+b^3+c^3)$.

Zadanie 3.
Rozstrzygnij, czy istnieje liczba rzeczywista m, dla której wielomian
$W(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ jest podzielny przez $(x-m)^2$?

POWODZENIA ☺