

XXVI KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap wojewódzki)
(25 listopada 2011 r. godz. 10:00 - 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Liczby x, y, z są dodatnie.

Wykaż, że zachodzi nierówność: $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{(x+1)(y+1)} + \frac{z}{(x+1)(y+1)(z+1)} < 1$.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby $n^2 + n + 1$ oraz $n^2 + n + 3$ są liczbami pierwszymi.

Zadanie 3.

Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego ABCDEF. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola tego sześciokąta.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Danych jest pięć dodatnich liczb rzeczywistych. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a, b , dla których zachodzi nierówność $0 \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}$.

Zadanie 2.

Każda z liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}, x_{101}$ może przyjmować wartość 1 lub -1 . Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1$. Podaj stosowny przykład dla tej najmniejszej wartości.

Zadanie 3.

Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wykaż, że jeżeli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x^2 - yz = 3 \\ y^2 - zx = 4 \\ z^2 - xy = 5 \end{cases}$$

Zadanie 2.

Wykaż, że jeżeli c, d są liczbami całkowitymi, przy czym $c \neq 0$ i $d > 0$, to równanie $x^3 - 3cx^2 - dx + c = 0$ nie posiada więcej niż jeden pierwiastek wymierny.

Zadanie 3.

Na okręgu o promieniu R opisano trapez równoramienny. Odcinek łączący punkty styczności okręgu z ramionami trapezu ma długość m . Oblicz pole trapezu.