

**XXVI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)**  
**(5 listopada 2010 r. godz. 10:00 - 12:00)**

---

**ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH**

**Zadanie 1.**

Wyznaczyć wszystkie liczby  $\overline{abcde}$  podzielne przez 36, których cyfry spełniają warunki:  
 $a < b < c < d < e$ .

**Zadanie 2.**

Dodając sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dwóch liczb całkowitych otrzymamy liczbę 450. Znaleźć te liczby.

**Zadanie 3.**

Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.

---

**ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH**

**Zadanie 1.**

Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych  $(x, y)$  spełniających równanie  
 $(x + y)(x^x + y^y) = 2009$ .

**Zadanie 2.**

Udowodnij, że jeżeli  $xyz = 1$ ,  $\frac{1}{a} = \frac{x}{x^2+1}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{y}{y^2+1}$ ,  $\frac{1}{c} = \frac{z}{z^2+1}$  i  $abc$  jest liczbą całkowitą, to  $a^2 + b^2 + c^2$  jest liczbą całkowitą.

**Zadanie 3.**

W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych. Obliczyć długości przyprostokątnych.

---

**ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH**

**Zadanie 1.**

Udowodnij, że równania  $ax^2 + bx + c = 0$  i  $cx^2 + bx + a = 0$ , gdzie  $a \neq c$ , mają wspólny pierwiastek wtedy i tylko wtedy gdy  $|a + c| = |b|$ .

**Zadanie 2.**

Udowodnij, że jeżeli jeden z pierwiastków równania  $ax^3 + bx + c = 0$  o współczynnikach wymiernych jest iloczynem dwóch pozostałych pierwiastków, to jest on liczba wymierna.

**Zadanie 3.**

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  prawdziwe są nierówności:

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b} \text{ pod warunkiem, że } a \geq b > 0.$$