XXIV KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap wojewódzki)
(12 grudnia 2008 r. godz. 10:00 - 12:30)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie l.

Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań $\begin{cases}(x+y-5)(x+y+5)=2(xy-1)-z^2\\ \frac{2}{xy}+\frac{1}{2yz}+\frac{1}{xz}=\frac{11}{xyz}\end{cases}$

z niewiadomymi *x*, *y*, *z*.

Zadanie 2.
W kole o promieniu 10 jednostek wybrano 99 punktów. Dowieść, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż jedna jednostka.

Zadanie 3.
Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite *n*, dla których liczba 14^n-9 jest liczba pierwszą.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie l.

Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań $\begin{cases}\frac{25x}{yz}+\frac{9y}{xz}=\frac{12}{x}\\ \frac{9y}{xz}+\frac{4z}{xy}=\frac{20}{y}\\ \frac{4z}{xy}+\frac{25x}{yz}=\frac{30}{z}\end{cases}$ z niewiadomymi *x*, *y*, *z*.

Zadanie 2.
Wewnątrz sześciokąta foremnego *ABCDEF* wybrano punkt *S*. Dowieść, że suma pól trójkątów *ABS, CDS, EFS* jest połową pola sześciokąta *ABCDEF*.

Zadanie 3.
Rozwiązać w zbiorze liczb rzeczywistych $(x-1-x^2)=\frac{3}{-y^2+4y-8}$.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie l.
Udowodnić, że jeżeli $abc=1$ i $a,b,c>0$, to $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\geq 1$.

Zadanie 2.
Dowieść, że jeżeli długości a,b,c boków trójkąta *ABC* spełniają nierówność $2a-b<c$, to miary jego kątów wewnętrznych α,β,γ leżących odpowiednio naprzeciw boków o długościach a,b,c spełniają nierówność $2\alpha-\beta<\gamma$.

Zadanie 3.
Niech $a+b=1$ i $a,b\epsilon R$. Wykazać, że jeżeli a^3,b^3 są liczbami wymiernymi, to a,b też są liczbami wymiernymi.