

XXIII KONKURS MATEMATYCZNY
im. Prof. J. MARSZAŁA (etap powiatowy)
(26 października 2007 r. godz. 10:00 - 12:00)

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS PIERWSZYCH

Zadanie 1.

Rozwiązać układ równań z niewiadomymi x, y, z :
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 23 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 22 \end{cases}.$$

Zadanie 2

Trzech robotników wykonało pewną pracę w ciągu 4 dni. Pierwszy z nich wykonałby tę pracę w ciągu 10 dni, drugi na jej wykonanie zużyłby 12 dni. W ciągu ilu dni wykonałby tę pracę trzeci robotnik?

Zadanie 3.

Dowieść, że jeżeli w trójkącie długości dwóch wysokości są nie mniejsze od długości boków, na które są opuszczone, to trójkąt ten jest prostokątny równoramienny.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS DRUGICH

Zadanie 1.

Rozwiązać układ trzech równań ze zmiennymi x, y, z :
$$\begin{cases} \frac{yz}{y+z} = a \\ \frac{xz}{x+z} = b \\ \frac{xy}{x+y} = c \end{cases}$$

Zadanie 2.

Wykazać, że jeżeli $a > b > c$, to $a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + c^2b + b^2a$.

Zadanie 3.

Udowodnić, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od jego obwodu, a większa od $\frac{3}{4}$ jego obwodu.

ZADANIA DLA UCZNIÓW KLAS TRZECICH

Zadanie 1.

Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$1 + x^2 + x^4 \geq \frac{1}{3}(1 + x + x^2)^2.$$

Zadanie 2.

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych równanie
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{y} + \sqrt{z-1} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Zadanie 3.

Na płaszczyźnie danych jest 5000 różnych punktów. Dowieść, że istnieje koło zawierające w swym wnętrzu dokładnie 2007 z zadanych punktów.