

XIV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2013/2014)

Etap rejonowy

15 marca 2014, godzina 10.00 (150 minut)

- Przez punkt A leżący na okręgu o środku O poprowadzono styczną l oraz cięciwę AB o długości 12. Obliczyć stosunek pola trójkąta BOC do pola czworokąta $OBAC$, jeżeli BC jest cięciwą tego okręgu równoległą do prostej l , poprowadzoną między prostą l a środkiem okręgu, odległą od prostej l o 4.
- Dane jest wyrażenie $w(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą.
Udowodnij, że $w(a) + w(1 - a) = 1$, dla dowolnych a rzeczywistych.
- Pole i obwód trójkąta prostokątnego mają równe wartości liczbowe, a długości wszystkich jego boków są liczbami naturalnymi. Obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz długości jego boków.
- Uporządkować rosnąco liczby x, y, z , jeżeli :
$$x = \left(\left(\left(10^{2014\sqrt{2}} \right)^{2014\sqrt{3}} \right)^{\dots} \right)^{2014\sqrt{2014}}, \quad y = \left(10^{\frac{1}{2014\sqrt{2}}} \right)^2, \quad z = \sqrt[2014]{10} \cdot \sqrt[2014]{100} \cdot \sqrt[2014]{1000} \cdot \dots \cdot \sqrt[2014]{100\dots 0}$$

i w ostatnim czynniku liczby z występuje 2014 zer.
- Jacek i Wojtek mieszkają w miejscowościach A i B leżących przy tej samej szosie, w odległości 18km. Chłopcy wyruszają jednocześnie, jeden z miejscowości A , drugi z miejscowości B , idąc każdy ze stałą prędkością. Gdyby obaj szli naprzeciw siebie, to spotkaliby się po 3 godzinach marszu. Gdyby obaj wyruszyli ze swoich miejscowości i poruszali się w tym samym kierunku, to po upływie 3 godzin odległość między nimi wynosiłaby 15km. Z jaką prędkością idzie każdy z chłopców.

Powodzenia!

XIV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2013/2014)

Etap rejonowy

15 marca 2014, godzina 10.00 (150 minut)

- Wyznacz wszystkie funkcje liniowe $f(x) = ax + b$, spełniające warunki $f(a) = 2014^{14}b$ oraz $f(b) = 2014^{14}a$.
- Wyznacz wszystkie punkty należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 12x + 16}}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$ o współrzędnych całkowitych.
- Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność:
$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$
- Dany jest trójkąt ABC . Wyznacz miarę kąta ACB , jeżeli ortocentrum (tzn. punkt przecięcia wysokości) tego trójkąta należy do okręgu opisanego na trójkącie AOB , gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .
- Udowodnij, że jeżeli liczby 6 i liczba naturalna n są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik wynosi 1), to liczba $n^4 - 5n^2 + 4$ jest podzielna przez 72.

Powodzenia!