XIV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2013/2014)

Etap wojewódzki

26 kwietnia 2014, godzina 10.00 (150 minut)

1. Dane są dwa okręgi: o_1 – o środku O i średnicy $|AB| = 2R$ oraz o_2 – o środku B i promieniu BO, które przecinają się w punktach C i C'. Niech l będzie prostą styczną do okręgu o_1 w punkcie B, natomiast prosta prostopadła do cięciwy BC przechodząca przez O przecina prostą l w punkcie D. Ponadto na prostej l obrano punkt E taki, że B leży między punktami D i E oraz $|DE| = 3R$. Obliczyć długość AE.
2. Niech E i F będą punktami boków CD i BC równoległoboku $ABCD$. Prosta AE przecina przekątną BD w punkcie P, takim, że $|DP| : |BD| = 1:6$, a prosta AF przecina przekątną BD w punkcie R, takim, że $|BR| : |BD| = 1:4$. Wyznaczyć $\frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|CE|}{|ED|}$.
3. Oblicz sumę kwadratów rozwiązań rzeczywistych równania : $3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + 5 \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = 8$.
4. Wspaniały matematyk i patron naszego konkursu Franciszek Leja urodził się w XIX wieku, a zmarł w XX wieku. Oblicz rok jego urodzin i rok śmierci, jeśli suma dwucyfrowych końcówek roku urodzin i roku śmierci przy dzieleniu przez 12 daje iloraz 13 i resztę 8. Ponadto różnica dwucyfrowej końcówki roku urodzin i najmniejszej liczby naturalnej dodatniej, podzielnej jednocześnie przez 2 i 3, jest równa dwucyfrowej końcówce roku śmierci.
5. Znajdź (bez użycia kalkulatora) największą i najmniejszą pięciocyfrową liczbę naturalną n podzielną przez 101, dla której pierwsza cyfra jest taka jak piąta, a druga taka jak czwarta.

Powodzenia!

XIV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2013/2014)

Etap wojewódzki

26 kwietnia 2014, godzina 10.00 (150 minut)

1. Udowodnij, że jeżeli równanie $x^4 + 2ax + b = 0$ ma pierwiastek dwukrotny, to $27a^4 - 16b^3 = 0$.
2. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi:
$$a^6 + b^3 + c^2 + d \geq 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{abcd}.$$
3. Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają warunki:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = k \text{ i } \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = l.$$
Wyznaczyć za pomocą k i l sumę: $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$.
4. Dwa okręgi o promieniach R i r są styczne zewnętrznie. Poprowadzono zewnętrzną styczną do obu okręgów. Oblicz promień okręgu wpisanego w powstały trójkąt krzywoliniowy.
5. Na okręgu o promieniu 5 opisano trapez równoramienny. Odległość punktów styczności położonych na ramionach wynosi 8. Oblicz pole trapezu.

Powodzenia!