XIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2012/2013)

Etap wojewódzki

13 kwiecień 2013 r. godzina 10.00 (150 minut)

1. W równoległoboku o bokach a, b $(a > b)$ oraz kącie ostrym między nimi równym $60°$, poprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznych, które przecięły się tworząc czworokąt. Wiedząc, że dwa przeciwległe wierzchołki tego czworokąta należą do brzegu równoległoboku, zaś dwa pozostałe do jego wnętrza, oblicz obwód czworokąta. Jaki czworokąt utworzyły dwusieczne? Odpowiedź uzasadnij.

2. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 8 \\ y^2 + xy + yz = 12. \\ z^2 + yz + xz = -4 \end{cases}$

3. Wykaż, że liczba $2^{10} + 5^{12}$ jest liczbą złożoną.

4. Wiadomo, że w trójkącie ABC: $|\sphericalangle BAC| = 30°$, $|\sphericalangle BDC| = 60°$, gdzie D należy do odcinka AB i $|BD| = 2|AD|$. Znaleźć miarę kąta B trójkąta ABC.

5. Uczniów biorących w konkursie matematycznym należało umieścić w salach tak, by w każdej sali była ta sama liczba osób, jednak nie więcej niż 32 osoby. Na początku umieszczono w salach po 22 osoby, lecz okazało się, że dla jednego uczestnika zabrakło miejsca. Zrezygnowano więc z jednej sali, a wówczas miejsc w pozostałych wystarczyło dla wszystkich. Ilu uczestników wzięło udział w konkursie i ile sal przygotowano dla nich na początku?

Powodzenia!

XIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2012/2013)

Etap wojewódzki

13 kwiecień 2013 r. godzina 10.00 (150 minut)

1. Wykaż, że nierówność $x^8 + x^6 - 4x^4y + x^2y^2 + y^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y. Dla jakich x i y zachodzi równość?

2. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Wykaż, że $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.

3. Znajdź największą wartość ułamka $\frac{-x^4-3}{x^4+4x^2+4}$ oraz x dla którego ułamek osiąga największą wartość.

4. Wykaż, że jeśli równania $x^3 + ax + b = 0$ i $x^3 + cx + d = 0$ mają wspólne niezerowe rozwiązanie rzeczywiste, to $(ad - bc)(a - c)^2 = (b - d)^3$.

5. Wysokość CD trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$, ma długość h. Na wysokości CD jako na średnicy zakreślono okrąg przecinający ramię BC w takim punkcie E, że $\frac{|CE|}{|EB|} = \frac{k}{l}$. Oblicz pola trójkątów ABC i CDE.

Powodzenia!