

## XI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

### Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów z r. szk. 2010/2011)

Etap wojewódzki

7 maja 2011, godzina 10.00

(150 minut)

1. W trójkącie ABC, którego obwód wynosi 50 cm i  $|AC| = |BC|$ , poprowadzono środkowe AD oraz BE (D oraz E to środki odpowiednich boków trójkąta). Obwód trójkąta ABE jest o 8 cm większy od obwodu trójkąta ACD. Oblicz długości boków trójkąta ABC.
2. Dla jakich liczb całkowitych  $m$  ułamek  $\frac{m^3+1}{m-1}$  jest liczbą całkowitą?
3. W trapezie opisanym na okręgu długości boków nierównoległych wynoszą 3 i 5, a odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na czworokąty, których pola pozostają w stosunku 5 : 11. Wyznacz długości podstaw trapezu.
4. Udowodnij, że jeśli  $p$  i  $q$  są liczbami pierwszymi takimi, że  $p \geq 5$  i  $q - p = 2$ , to liczba  $(p + q)$  jest podzielna przez 12.
5. Udowodnij, że jeśli  $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ , to  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ .

**Powodzenia!**

---

## XI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

### Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum z r. szk. 2010/2011)

Etap wojewódzki

7 maja 2011, godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli  $a, b, c$  są takimi liczbami nieujemnymi, że  $a + b + c = 1$ , to  $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{4}$ .
2. Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita podzielna przez 3 jest sumą pięciu kwadratów liczb całkowitych, to co najmniej dwa z tych kwadratów są podzielne przez 9.
3. Udowodnij, że jeżeli równanie  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ma pierwiastek potrójny, to  $bc = 9ad$ .
4. W trójkącie ABC punkt S jest środkiem okręgu wpisanego. Przez punkt B poprowadzono prostą prostopadłą do prostej BS, a przez punkt C prostą prostopadłą do prostej CS. Proste te przecinają się w punkcie K. Wykaż, że punkty A, S, K leżą na jednej prostej.
5. Wykaż, że stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest niemniejszy niż 2 i równość ta zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego.

**Powodzenia!**