VII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)

Etap powiatowy

14 kwietnia 2007, godzina 10.00 (150 minut)

1. Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi nie mniejszymi od 3. Wykaż, że wysokość tego trójkąta, opuszczona na bok o środkowej długości, dzieli go na odcinki, których różnica długości jest równa 4.

2. Czy liczba $b^2 - 4ac$ może być równa 23, jeśli a, b, c są liczbami całkowitymi?

3. W kwadracie obrano $2n^2 + 1$ punktów tak, że żadne trzy nie należą do jednej prostej. Udowodnij, że wśród wybranych punktów istnieją trzy, które są wierzchołkami trójkąta o polu większym niż $\frac{1}{2n^2}$ pola kwadratu.

4. Rozwiąż układ równań : $\begin{cases} x(y+z) = 5 \\ y(z+x) = 10 \\ z(x+y) = 13 \end{cases}$.

5. Wykaż, że : $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100}$

Powodzenia!

VII Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap powiatowy

14 kwietnia 2007, godzina 10.00 (150 minut)

1. W kartezjańskim układzie współrzędnych zaznaczono 5 punktów o współrzędnych całkowitych (punktów kratowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów także jest punktem kratowym.

2. Wykaż, że jeśli równanie $x^2 + px + q = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste, to równanie

   $x^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)px + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 q = 0$ również ma pierwiastki rzeczywiste.

3. Wykaż, że jeśli $a + b + c = 0$ to $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

4. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $G(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ wynosi $x^3 + x^2 + x + 12$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 - 1$.

5. Przez wierzchołek A kwadratu ABCD poprowadzono prostą przecinającą przedłużenia boków BC i CD odpowiednio w punktach M i N. Udowodnij, że $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2} = \frac{1}{|AB|^2}$.

Powodzenia!