VI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap rejonowy
22 kwietnia 2006, godzina 10.00 (150 minut)

1. W trójkąt ABC, którego miary kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C wynoszą odpowiednio α, β, γ wpisano okrąg styczny do boków trójkąta w punktach D, E, F. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta DEF.

2. Wykaż, że jeżeli liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych różnych od zera, to liczba 5n również ma tę własność.

3. Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.
   Rozwiąż równanie $\left[\frac{3x+1}{2}\right] = \frac{2x-1}{3}$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$

5. Dla liczb całkowitych a, b, c, d, e, f każda z sum $a+b+c,\ \ b+c+d+e,\ \ d+e+f$ jest liczbą nieparzystą. Udowodnij, że iloczyn $abcdef$ jest podzielny przez 4.

Powodzenia!

VI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap rejonowy
22 kwietnia 2006, godzina 10.00 (150 minut)

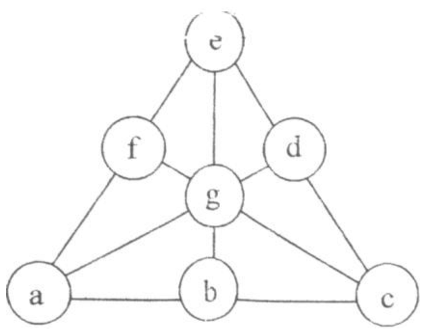
1. Wykaż, że jeżeli $ax^2 + bx + c$ jest liczbą całkowitą dla dowolnego $x \epsilon C$, to a, b, c nie muszą być liczbami całkowitymi.

2. Wykaż, że jeżeli r jest długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c to suma wysokości w tym trójkącie wynosi $r(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

3. Rozwiąż równanie $(1+x+x^2)^2 = \frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$ z niewiadomą x, jeśli $|a| \geq 2$.

4. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x) = x^3 + px + q$, gdzie $q \neq 0$ ma trzy pierwiastki, to $p < 0$.

5. Wykaż, że nie istnieją kolejne liczby całkowite a, b, c, d, e, f, g takie, by sumy każdej trójki liczb leżących wzdłuż zaznaczonych odcinków (boków i wysokości trójkąta) były równe (patrz rys.)



Powodzenia !