VI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap powiatowy
25 marca 2006, godzina 10.00 (150 minut)

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $(x^2+1)(y^2+1)=(x+y)^2+1$.
2. Udowodnij, że dla dowolnego n całkowitego $12|(n+2)(n-7)(n-9)(n-14)$.
(Symbol $a|b$ oznacza, że liczba b jest podzielna przez liczbę a).
3. Wykaż, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to
$$ab+bc+ac \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}\,.$$
4. Wykaż, że nie istnieje trójkąt o wysokościach 1, 2, 3.
5. W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB poza punkt A odkładając odcinek AD o długości |AC| oraz poza punkt B odkładając odcinek BE o długości |BC|. Uzasadnij, że $|\sphericalangle DCE|=135°$.

Powodzenia!

VI Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap powiatowy
25 marca 2006, godzina 10.00 (150 minut)

1. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania
$2x^2-(m-1)x+m+1=0$ spełniają warunek $|x_1-x_2|=1$?
2. Udowodnij, że liczba postaci n^5-5n^3+4n dzieli się przez 120.
3. Trzy kolejne liczby całkowite są długościami boków trójkąta, a także sześciany tych liczb są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, ze takich trójkątów jest nieskończenie wiele. Dla jakich trójek kolejnych liczb całkowitych będących długościami boków trójkąta ich sześciany nie są długościami boków trójkąta?
4. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wiedząc, ze stosunek podstaw tego trapezu jest równy 2, a jego pole 45, oblicz pole każdego z tych trójkątów.
5. Niech a, b, c oznaczają długości boków pewnego trójkąta. Czy równanie
$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ ma pierwiastki rzeczywiste?

Powodzenia!