

V Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom I
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)
Etap wojewódzki
4 czerwca 2005, godzina 10.00 (150 minut)

1. Wykaż, że jeżeli liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita, to również $a^5 + \frac{1}{a^5}$ jest liczbą całkowitą.
2. Na okręgu opisano pięciokąt o kolejnych bokach długości a, b, c, d, e . Wyznacz długości odcinków, na jakie został podzielony bok długości a punktem styczności z okręgiem.
3. Udowodnij, że jeśli dla każdego x rzeczywistego $f(x + 2) + f(x - 2) = 0$, to funkcja f jest okresowa. Znajdź okres tej funkcji. Czy można wnioskować, że jest to okres zasadniczy?
4. Znajdź sumę wszystkich liczb trzycyfrowych, których wszystkie cyfry są nieparzyste.
5. Długości boków dwóch prostokątów wyrażają się liczbami całkowitymi dodatnimi. W każdym prostokącie długość jednego boku nie jest większa od 60, a długość drugiego jest większa od 2000. Wykaż, że boki tych prostokątów są równe, jeśli ich przekątne są równe.

Powodzenia!

V Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych
Poziom II
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)
Etap wojewódzki
4 czerwca 2005, godzina 10.00 (150 minut)

1. Podaj wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) dla których funkcja $f(x) = |x + a| + |x + b|$ jest parzysta.
2. Oblicz ilość punktów o obu współrzędnych całkowitych zawartych w obszarze domkniętym (tzn. wraz z brzegiem) ograniczonym parabolą o równaniu $y = x^2 - 50x + 49$ i osią OX. (Możesz skorzystać ze wzoru $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$, który zachodzi dla $n \in N_+$)
3. Wykaż, że ortocentrum (tzn. punkt przecięcia się wysokości) trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt spodkowy (tzn. trójkąt, którego wierzchołki są spodkami wysokości danego trójkąta).
4. Wykaż, że jeśli dodatnie i różne liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to zachodzi nierówność $a^n + c^n > 2b^n$ dla dowolnego dodatniego naturalnego n .
5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x + 3}$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Powodzenia!