

**IV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych**  
**I Poziom**  
(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)  
Etap rejonowy - kwiecień 2004

- Niech  $p$  będzie daną liczbą pierwszą. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ .
- Na trójkącie równobocznym  $ABC$  opisano okrąg. Na łuku  $BC$  nie przechodzącym przez punkt  $A$  wybrano punkt  $P$ , różny od końców łuku. Odcinki  $AP$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $K$ .  
Udowodnij, że  $\frac{1}{|PK|} = \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|}$ .
- Rozwiąż układ równań: 
$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2 \\ \frac{xyz}{y+z} = 1,2 \\ \frac{xyz}{x+z} = 1,5 \end{cases}$$
- Kwadrat o boku długości  $a$  podzielono prostymi równoległymi do jego boków na  $n^2$  przystających kwadracików (o boku długości  $\frac{a}{n}$ ). W każdy z tych kwadratów wpisano koło. Wykaż, że pole części danego kwadratu nie pokrytej kołami nie zależy od  $n$ .
- Wykaż, że jeżeli  $a, b, x, y \in R_+$ ,  $x + y = 1$  oraz  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{ax+by}$ , to  $a = b$ .

**Powodzenia!**

**IV Podkarpacki Konkurs Matematyczny dla szkół ponadgimnazjalnych**  
**II poziom**  
(klasy drugie liceum i trzecie technikum)  
Etap rejonowy - kwiecień 2004

- Wyznacz liczbę pierwiastków rzeczywistych równania  $x \cdot |x| = x + k$  w zależności od wartości parametru  $k$ .
- Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych spełniające układ warunków: 
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 13 + x^2y^2 \\ x^2 - y^2 = 1 + 2xy \\ xy \leq 0 \end{cases}$$
- Wśród trójkątów prostokątnych, których długości boków wyrażają się liczbami całkowitymi, znajdź te, których podwojone pole wyraża się tą samą liczbą co ich potrojony obwód.
- Wykaż, że jeśli  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ , to zachodzi nierówność: 
$$6abc \leq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$$
- Przekątne czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $E$ . Wiadomo, że trójkąty  $ABE$  i  $CDE$  mają równe pola, długość boku  $AB$  jest równa 4, a przekątna  $AC$  jest zawarta w dwusiecznej kąta  $A$ . Oblicz długość boku  $BC$ .

**Powodzenia!**