

**III Podkarpacki Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych**

Etap wojewódzki

31 maja 2003 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ spełnia warunki: $f(2002) > 2002$ i $f(2004) > 2004$. Wykaż, że $f(2003) > 2003$.
2. Udowodnij, że czworokąt wypukły ABCD jest trapezem o podstawach AB i CD wtedy i tylko wtedy, gdy punkt E przecięcia przekątnych AC i BD dzieli odcinek równoległy do AB o końcach znajdujących się na AD i BC na połowy.
3. Wykaż, że jeśli D, E, F są rzutami prostokątnymi dowolnego punktu wewnętrznego P trójkąta równobocznego ABC odpowiednio na boki BC, AC, AB tego trójkąta, to zachodzi równość:
$$\frac{|PD|+|PE|+|PF|}{|BD|+|CE|+|AF|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
4. Wykazać, że rozwiązanie (x, y, z) układu
$$\begin{cases} (x + y + z)(8x + y) = a^6 + 2a^3b^3 \\ (x + y + z)(8y + z) = b^6 + 2b^3c^3, \\ (x + y + z)(8z + x) = c^6 + 2c^3a^3 \end{cases}$$
 gdzie $a, b, c \in R_+$ spełnia nierówność $|x + y + z| \geq abc$.
5. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Powodzenia !