XI JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. H. STEINHAUSA

3 grudnia 2011 r.

Klasa pierwsza

1.Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, których różnica kwadratów jest równa 2011.

2.Załóżmy, że przy okrągłym stole siedzi 7 osób. Uzasadnij, że można je przesadzić tak, aby każda osoba miała obu sąsiadów innych niż poprzednio.

3.Twierdzenie:

„Jeśli dla pewnych liczb całkowitych a i b liczba 11a + 7b jest podzielna przez 13, to również liczba a + 3b jest podzielna przez 13”

może być udowodnione następująco:

$11a+7b=11a+7b+2\cdot 13b-2\cdot 13b=11a+7b+26b-26b=11a+33b-26b=$

$=11(a+3b)-26b.$

Ponieważ $13\,|\,11a+7b,\ 13\,|\,26b$ i liczby 11 i 13 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1), więc $13\,|\,a+3b.$

W analogiczny sposób udowodnij twierdzenie:

„Jeśli dla pewnych liczb całkowitych a i b liczba 9a + 33b jest podzielna przez 17, to liczba a – 2b też jest podzielna przez 17”.

4(S).Jeśli ktoś ma 5 zł 27 groszy, to ma na pewno 2 grosze, ale nie ma na pewno 17 groszy. Rozumiemy to tak: bez monety 2 – groszowej lub dwóch monet groszowych nie można złożyć sumy 5 zł 27 groszy, ale można tę sumę złożyć z 5 – złotówki, 20 – groszówki, 5 – groszówki i 2 – groszówki, a wtedy nie zawiera ona kwoty 17 groszy. Po tym wyjaśnieniu można mówić o pewnych kwotach, że zawierają inne na pewno.
Pytanie: jeśli ktoś ma 77 groszy, to jakie kwoty (kwoty o groszy nie bierzemy pod uwagę) na pewno ma i ile ich jest ?
Zakładamy, że osoba ta ma, w wystarczających ilościach, monety: 1, 2, 5, 10, 20, 50 – groszy.

Czas rozwiązywania zadań – 150 minut. ŻYCZYMY POWODZENIA !

Zadanie 4 jest autorstwa prof. H. Steinhausa.

Tę kartkę możesz zabrać ze sobą.

Kraj bez matematyki nie wytrzyma współzawodnictwa z tymi krajami, które matematykę uprawiają.

Hugo Steinhaus

XI JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. H. STEINHAUSA

3 grudnia 2011 r.

Klasa druga

1.Zbadaj, czy istnieją liczby całkowite, których różnica sześcianów jest równa 2011.

2.Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \\ 10x-20y+30z=1000. \end{cases}$

3.W trójkącie ABC dane są długości trzech wysokości: $h_1 = 60$, $h_2 = 65$, $h_3 = 156$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

4(S).Jeśli ktoś ma 5 zł 27 groszy, to ma na pewno 2 grosze, ale nie ma na pewno 17 groszy. Rozumiemy to tak: bez monety 2 – groszowej lub dwóch monet groszowych nie można złożyć sumy 5 zł 27 groszy, ale można tę sumę złożyć z 5 – złotówki, 20 – groszówki, 5 – groszówki i 2 – groszówki, a wtedy nie zawiera ona kwoty 17 groszy. Po tym wyjaśnieniu można mówić o pewnych kwotach, że zawierają inne na pewno.
Pytanie: jeśli ktoś ma 188 groszy, to jakie kwoty (kwoty 0 groszy nie bierzemy pod uwagę) na pewno ma i ile ich jest ?
Zakładamy, że osoba ta ma, w wystarczających ilościach, monety: 1, 2, 5, 10, 20, 50 – groszy oraz 1 złoty.

Czas rozwiązywania zadań – 150 minut. ŻYCZYMY POWODZENIA !

Zadanie 4 jest autorstwa prof. H. Steinhausa.

Tę kartkę możesz zabrać ze sobą.

Kraj bez matematyki nie wytrzyma współzawodnictwa z tymi krajami, które matematykę uprawiają.

Hugo Steinhaus

XI JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. H. STEINHAUSA

3 grudnia 2011 r.

Klasa trzecia

1.Zbadaj, czy istnieją liczby całkowite, których różnica piątych potęg jest równa 2011.

2.Udowodnij, że równanie $xy + yz + zx = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

3.W trójkącie prostokątnym ABC punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego. Punkt ten połączono ze środkiem kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej na zewnątrz trójkąta. Oblicz długość otrzymanego w ten sposób odcinka, jeśli suma długości przyprostokątnych trójkąta jest równa 2001.

4(S).Jeśli ktoś ma 5 zł 27 groszy, to ma na pewno 2 grosze, ale nie ma na pewno 17 groszy. Rozumiemy to tak: bez monety 2 – groszowej lub dwóch monet groszowych nie można złożyć sumy 5 zł 27 groszy, ale można tę sumę złożyć z 5 – złotówki, 20 – groszówki, 5 – groszówki i 2 – groszówki, a wtedy nie zawiera ona kwoty 17 groszy. Po tym wyjaśnieniu można mówić o pewnych kwotach, że zawierają inne na pewno.
Pytanie: jeśli ktoś ma 199 groszy, to jakie kwoty (kwoty 0 groszy nie bierzemy pod uwagę) na pewno ma i ile ich jest ?
Zakładamy, że osoba ta ma, w wystarczających ilościach, monety: 1, 2, 5, 10, 20, 50 – groszy oraz 1 złoty.

Czas rozwiązywania zadań – 150 minut. ŻYCZYMY POWODZENIA !

Zadanie 4 jest autorstwa prof. H. Steinhausa.

Tę kartkę możesz zabrać ze sobą.

Kraj bez matematyki nie wytrzyma współzawodnictwa z tymi krajami, które matematykę uprawiają.

Hugo Steinhaus