VIII JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
6 grudnia 2008 r.

Klasa I

1. Wykaż, że jeśli liczba całkowita jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, to jest także sumą trzech kolejnych liczb naturalnych.
2. We wnętrzu trójkąta równobocznego obrano punkt P i poprowadzono z niego odcinki prostopadłe do boków. Pole kwadratu, którego bokiem jest suma trzech otrzymanych odcinków, jest równe $36\ \text{cm}^2$. Oblicz obwód tego trójkąta.
3. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x^2 + 12y + 8 = 0 \\ 4y^2 + 12z + 9 = 0 \\ 4z^2 + 12x + 10 = 0 \end{cases}$.
4. (S).Udowodnij, że nie istnieją parami różne liczby pierwsze a, b, c, d takie, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Klasa II

1. Rozważmy zbiór A wszystkich liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym każdej z nich występuje dokładnie jeden raz cyfra 1, dokładnie dwa razy cyfra 2, dokładnie trzy razy cyfra 3, … , dokładnie dziewięć razy cyfra 9; przy czym cyfry te występują we wszystkich możliwych kolejnościach. Czy do zbioru A należy liczba będąca kwadratem liczby naturalnej ? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
2. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych zilustruj zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(b; c)$, dla których równanie $x^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1 \in (-3;\ -2)$ i $x_2 \in (-1;\ 0)$.
3. Środkowe poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych trójkąta prostokątnego mają długości p i q. Oblicz długość trzeciej środkowej tego trójkąta.
4. (S).Udowodnij, że nie istnieją parami różne liczby pierwsze a, b, c, d takie, że $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$.

Klasa III

1. Liczby $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2009}$ są różnymi elementami zbioru $\{1; 2; 3; \dots; 2009\}$. Rozstrzygnij, czy liczba $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdot \ldots \cdot (a_{2009} - 2009)$ jest parzysta czy nieparzysta.
2. Uzasadnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+a^2} \geq a + b + c$.
3. Wykaż, że jeśli liczby naturalne $a, b,$ c są długościami boków trójkąta prostokątnego, to przynajmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.
4. (S).Udowodnij, że nie istnieją parami różne liczby pierwsze a, b, c, d takie, że $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$.