V JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

3 grudnia 2005 r.

KLASA I

1. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$.

2. W trójkącie ABC o bokach długości |AB| = 24, |BC| = 16, |AC| = 20 poprowadzono prostą równoległą do boku AC. Prosta ta dzieli trójkąt ABC na dwie figury mające równe obwody. Oblicz:
   a) Długości odcinków na jakie ta prosta dzieli boki AB i BC,
   b) Pole powierzchni wyciętego przez prostą trapezu.

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczby $5^n - 2$ i $5^n + 2$ są liczbami pierwszymi.

4. S) Znany jest następujący sposób wyznaczania dni tygodnia:
   $A = d + [2{,}6m - 0{,}2] + y + \left[\frac{y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] - 2c;$ w = reszta z dzielenia liczby A przez 7,

   gdzie d – dzień miesiąca (od 1 do 31), y – liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr roku, c – liczba utworzona z dwóch pierwszych cyfr roku, m –miesiąc według oznaczeń: marzec – 1 (w starożytnym kalendarzu marzec był pierwszym miesiącem roku), kwiecień – 2, maj – 3, czerwiec – 4, lipiec – 5, sierpień – 6, wrzesień – 7, październik – 8, listopad – 9, grudzień – 10, styczeń – 11, luty – 12, A jest wielkością pomocniczą. Użyty symbol [x] to tzw. cecha liczby x, czyli największa liczba całkowita nie przekraczająca liczby x. Dzień tygodnia „w" odczytujemy następująco: 0 – niedziela, 1 – poniedziałek, 2 – wtorek, 3 – środa, 4 – czwartek, 5 – piątek, 6 – sobota. Wyznacz według podanego sposobu, jakim dniem tygodnia był 14 styczeń 1887r., czyli dzień narodzin Hugona Steinhausa – Patrona konkursu.

Czas pracy 150 minut.
Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !

V JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

3 grudnia 2005 r.

KLASA II

1. Znajdź liczby x, y, z spełniające równanie $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

2. Po krzywej o równaniu $y=x^2$ poruszają się punkty A, B, C tak, że w każdej chwili spełniona jest równość $x_2-x_1=x_3-x_2=a$, gdzie $a>0$, zaś x_1,x_2,x_3 oznaczają odcięte punktów A, B, C. Udowodnij, że pole trójkąta ABC jest stałe.

3. Wewnątrz kwadratu ABCD wybrano taki punkt P, że $|\angle PBA| = |\angle PAB| = 15°$. Oblicz miarę kąta DPC.

4. (S) Znany jest następujący sposób wyznaczania dni tygodnia:
   $A=d+[2{,}6m-0{,}2]+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c$; w = reszta z dzielenia liczby A przez 7,

   gdzie d – dzień miesiąca (od 1 do 31), y – liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr roku, c – liczba utworzona z dwóch pierwszych cyfr roku, m – miesiąc według oznaczeń: marzec – 1 (w starożytnym kalendarzu marzec był pierwszym miesiącem roku), kwiecień – 2, maj – 3, czerwiec – 4, lipiec – 5, sierpień – 6, wrzesień – 7, październik – 8, listopad – 9, grudzień – 10, styczeń – 11, luty – 12, A jest wielkością pomocniczą. Użyty symbol [x] to tzw. cecha liczby x, czyli największa liczba całkowita nie przekraczająca liczby x. Dzień tygodnia „w" odczytujemy następująco: 0 – niedziela, 1 – poniedziałek, 2 – wtorek, 3 – środa, 4 – czwartek, 5 – piątek, 6 – sobota. Wyznacz według podanego sposobu, jakim dniem tygodnia był 1 września 1897 r., t.j. dzień, w którym Hugo Steinhaus – Patron konkursu rozpoczął naukę w Jasielskim Gimnazjum, obecnym I Liceum Ogólnokształcącym im. Kr. St. Leszczyńskiego w Jaśle.

Czas pracy 150 minut.
Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !

V JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

3 grudnia 2005 r.

KLASA III

1. Znajdź wszystkie liczby całkowite x, dla których wyrażenie $\frac{5x+3}{2x+1}$ ma wartość całkowitą.

2. Trzy samochody wyjechały z tego samego miejsca i w tym samym kierunku; pierwsze dwa jednocześnie, a trzeci w d godzin po nich. Ich prędkości są odpowiednio równe a, b, c, gdzie a < b < c. Jak długo trzeci samochód znajdował się między pierwszym, a drugim?

3. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P, którego odległości od prostych zawierających boki AB, BC, AC są odpowiednio równe *x, y, z*, zaś wysokości trójkąta ABC opuszczone na boki AB, BC, AC mają długości odpowiednio h_1, h_2, h_3. Udowodnij, że $\frac{x}{h_1}+\frac{y}{h_2}+\frac{z}{h_3}=1$.

4. (S) Znany jest następujący sposób wyznaczania dni tygodnia:
$A = d + [2{,}6m - 0{,}2] + y + \left[\frac{y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] - 2c$; w = reszta z dzielenia liczby A przez 7,

gdzie d – dzień miesiąca (od 1 do 31), y – liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr roku, c – liczba utworzona z dwóch pierwszych cyfr roku, m – miesiąc według oznaczeń: marzec – 1 (w starożytnym kalendarzu marzec był pierwszym miesiącem roku), kwiecień – 2, maj – 3, czerwiec – 4, lipiec – 5, sierpień – 6, wrzesień – 7, październik – 8, listopad – 9, grudzień – 10, styczeń – 11, luty – 12, A jest wielkością pomocniczą. Użyty symbol [x] to tzw. cecha liczby x, czyli największa liczba całkowita nie przekraczająca liczby x.Dzień tygodnia „w" odczytujemy następująco: 0 – niedziela, 1 – poniedziałek, 2 – wtorek, 3 – środa, 4 – czwartek, 5 – piątek, 6 – sobota. Wyznacz według podanego sposobu, jakim dniem tygodnia był 7 września 1927 r., t.j. dzień, w którym Hugo Steinhaus – Patron konkursu podjął decyzję o wydawaniu czasopisma „Studia Mathematica".

Czas pracy 150 minut.
Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !