

IV JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

20 listopada 2004 r.

Klasa pierwsza

1. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 12 cm i 20 cm, zaś bok prostopadły do podstawy ma długość 8 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od podstawy o długości 20 cm i od boku o długości 8 cm.
2. Napisz najmniejszą liczbę naturalną, która po podzieleniu przez liczby: 2, 3, 4, 5, ..., 10 daje odpowiednio resztę: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 9.
3. Zapisz każdą z liczb: 0, 5, 6, 8, 12, 13, 36, 42, 48, 66, 108, 180 za pomocą dokładnie czterech szóstek i niektórych ze znaków: +, -, ·, ÷, ().
(Uwaga: poszczególne znaki mogą być używane przy zapisywaniu danej liczby kilkakrotnie).
4. (S) Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ nie jest podzielna przez 5.

Czas pracy 120 minut.

Nie wolno używać kalkulatorów.

Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !

IV JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

20 listopada 2004 r.

Klasa druga

1. Znajdź najmniejszą dodatnią liczbę naturalną n taką, że $\frac{1}{8}n$ jest kwadratem, $\frac{1}{27}n$ jest sześcianiem, $\frac{1}{125}n$ jest piątą potęgą liczby naturalnej.
2. Wszystkie podzbiory zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ (włącznie ze zbiorem pustym i danym zbiorem Z) ustaw w szereg tak, by każdy następny zbiór, poczynając od drugiego różnił się dokładnie jednym elementem od zbioru bezpośrednio go poprzedzającego.
3. W trójkąt równoramienny ABC w którym $|AC| = |BC| = p$, $|AB| = q$ wpisano okrąg styczny do ramion tego trójkąta w punktach D i E . Oblicz odległość punktów D i C .
4. (S) Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ jest podzielna przez 13.

Czas pracy 120 minut.

Nie wolno używać kalkulatorów.

Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !

IV JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY

IM. HUGONA STEINHAUSA

20 listopada 2004 r.

Klasa trzecia

1. Udowodnij, że istnieje zbiór 49 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej. Podaj wszystkie zbiory o tej własności.
2. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2004\}$ wykreślono najpierw wszystkie liczby podzielne przez 6, następnie wykreślono wszystkie liczby podzielne przez 10, potem wykreślono jeszcze wszystkie liczby podzielne przez 15. Ile liczb pozostało w tym zbiorze po tych wykreśleniach?
3. Dany jest kwadrat o boku długości a . Dwa sąsiednie jego wierzchołki są środkami okręgów o promieniach równych długości boku kwadratu. Okręgi te podzieliły kwadrat na cztery figury. Oblicz pole każdej z tych figur.
4. (S) Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ nie jest podzielna przez 11.

Czas pracy 120 minut.

Nie wolno używać kalkulatorów.

Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.

POWODZENIA !